

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ
В МНОГОШАГОВОМ МЕТОДЕГ.Ю.МЕХТИЕВА, В.Р.ИБРАГИМОВ
Бакинский Государственный Университет

В [1] показано, что метод квадратур, примененный к решению нелинейного интегрального уравнения, можно привести к k -шаговому методу. Определяя недостатки метода квадратур, там же предложен новый многошаговый метод для численного решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра. Здесь показывается, что с помощью коэффициентов конечно-разностного метода можно определить коэффициенты в многошаговом методе, построенным в [1].

Введение. При решении задач естествознаний, сначала строится математическая модель, затем подбирается метод для решения полученной модели. Найти точное решение таких модельных задач удастся не всегда. Поэтому для решения таких модельных задач используются приближенные методы. Среди этих приближенных методов, наиболее часто используемыми, являются численные методы. Широко применяемыми среди численных методов являются конечно-разностные методы, которые имеют применение во всех областях математики. Отметим, что точность конечно-разностных методов зависит от подбора их коэффициентов. Учитывая, что существуют многочисленные работы, посвященные исследованию конечно-разностных методов, здесь рассматривается определение коэффициентов многошагового метода, построенного в [1] для численного решения интегральных уравнений типа Вольтерра с помощью коэффициентов конечно-разностных методов.

Рассмотрим решение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K(x, s, y(s)) ds. \quad (1)$$

Предполагаем, что непрерывная функция $K(x, s, y)$ определена в области $G = \{x_0 \leq s \leq x \leq X, |z| \leq a\}$ и там же имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка p , включительно, а непрерывная функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, X]$, где имеет непрерывные производные до некоторого порядка $p+1$. В этом случае уравнение (1) будет иметь единственное решение $y(x)$, определенное на отрезке $[x_0, X]$. Разобьем отрезок на N равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$). Здесь величина $0 < h$ является шагом разбиений отрезка $[x_0, X]$ на N равных частей.

Для определения приближенного значения решения $y(x)$ уравнение (1), в [1] предложен следующий метод:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^k \alpha_i f_{n+i} + h \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^k \gamma_i^{(j)} K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}), \quad (2)$$

где коэффициенты $\alpha_i, \gamma_i^{(j)}$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots, k$) - некоторые действительные числа, целозначная величина, k - порядок многошагового метода (2), y_m - приближенное значение решения уравнения (1) в точке x_m ($m = 0, 1, 2, \dots$), а $f_m = f(x_m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Отметим, что название численного метода имеет прямую связь со способом определения его коэффициентов в методе (2).

§1. Определение коэффициентов в конечно-разностном методе

Отметим, что метод (2) не совпадает с методами квадратур Адамса и многошаговыми, предложенными Лабичом (Labich). Метод (2) по своей природе является многошаговым, однако как было отмечено, он отличается от известного многошагового метода.

В [2] предложен один способ определения коэффициентов метода (2), который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i &= 0, \quad \sum_{i=0}^k i \alpha_i = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \gamma_i^{(j)}, \\ \sum_{i=0}^k \frac{i^l}{l!} \alpha_i &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \frac{i^{l-1}}{(l-1)!} \gamma_i^{(j)} \quad (l = 2, 3, \dots, p). \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим следующее обозначение:

$$\beta_i = \sum_{j=0}^k \gamma_i^{(j)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k). \quad (4)$$

После учета (4) в системе линейных алгебраических уравнений (3), получим:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^k \frac{i^l}{l!} \alpha_i = \sum_{i=0}^k \frac{i^{l-1}}{(l-1)!} \beta_i \quad (l = 1, 2, \dots, p). \quad (5)$$

Как известно, однородная система линейно алгебраических уравнений (5) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы конечно-разностный метод:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i z_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i z'_{n+i} \quad (6)$$

имел степень p . Говорят, что конечно-разностный метод (6) имеет степень p , если имеет место

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i z(x+ih) - h \beta_i z'(x+ih)) = O(h^{p+1}). \quad (7)$$

Здесь $x = x_0 + nh$ фиксированные точки, а $z(x_m)$ и $z'(x_m)$ являются точным значением функции $z(x)$ и ее первой производной в точке x_m ($m=0,1,2,\dots$), соответственно.

Очевидно, что если конечно-разностный метод имеет степень p , то его коэффициенты являются решением системы (5). С учетом (4) можно утверждать, что эти коэффициенты и будут решением системы (3). При этом некоторые коэффициенты метода (2) находятся из системы (4). Исходя из этого, некоторые авторы называют метод (2) обобщением конечно-разностного метода (6). Действительно, если из системы (5) находим коэффициенты α_i, β_i ($i=0,1,2,\dots,k$), то с помощью системы (4), как было отмечено, можем найти коэффициенты $\gamma_i^{(j)}$ ($i, j=0,1,2,\dots,k$). Отметим, что решение системы (4) не единственно. Следовательно, в методе (2) имеются свободные коэффициенты, выбирая которые получаем более общий метод, чем конечно-разностный метод. Для иллюстрации сказанного, положим $k=2$ и рассмотрим следующий метод типа (2), имеющий степень $p=4$, который построен в [3]:

$$y_{n+2} = y_n + f_{n+2} - f_n + h(-K(x_n, x_n, x_n) - K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) - K(x_n, x_{n+2}, y_{n+2}) + K(x_{n+1}, x_n, y_n) + 4K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n+2}) + K(x_{n+2}, x_n, y_n) + K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+2}, x_{n+2}, y_{n+2}))/3. \quad (8)$$

Этот метод не является единственным методом со степенью $p=4$ при $k=2$. При $k=2$ существуют и другие методы со степенью $p=4$.

Если функции $K(x, s, z) = F(s, z)$, то из метода (8) получаем следующий метод:

$$y_{n+2} = y_n + f_{n+2} - f_n + h(F(x_n, y_n) + 4F(x_{n+1}, y_{n+1}) + F(x_{n+2}, y_{n+2}))/3. \quad (9)$$

При $K(x, s, z) = F(s, z)$, из уравнения (1) можем написать:

$$(y(x) - f(x))' = F(x, y), \quad y(x_0) = f(x_0).$$

Следовательно, если положим $f(x) \equiv 0$, то метод (9) превращается в метод Симпсона, примененного к задаче:

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что метод (9) является единственным методом со степенью $p=4$ типа (6). В этом случае получаем, что в частности из метода (2) следует метод (6). Исходя из этого, можно сказать, что конечно-разностный метод (6) является частным случаем метода (2). Отметим, что в случае $k=1$ метод со степенью $p=2$, и содержащийся в (6), единственный. Однако, при $k=1$ метод со степенью $p=2$ типа (2) не единственный. Для этого в (2) возьмем $k=1$. Тогда имеем:

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1} - f_n + h(\gamma_0^{(0)}(x_n, x_n, y_n) + \gamma_0^{(1)}K(x_{n+1}, x_n, y_n) + \gamma_1^{(0)}K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) + \gamma_1^{(1)}K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1})). \quad (11)$$

Для того, чтобы метод (11) имел степень $p = 2$, его коэффициенты должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(0)} + \gamma_0^{(1)} &= 1/2, & \gamma_1^{(0)} + \gamma_1^{(1)} &= 1/2, \\ \gamma_0^{(0)} + \gamma_1^{(0)} + \gamma_0^{(1)} + \gamma_1^{(1)} &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Легко заметить, что коэффициенты следующих методов подчиняются условиям (12)

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + f_{n+1} - f_n + h(K(x_n, x_n, y_n) + K(x_{n+1}, x_n, y_n) + \\ &+ K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}))/4, \\ y_{n+1} &= y_n + f_{n+1} - f_n + h(2K(x_n, x_n, y_n) - K(x_{n+1}, x_n, y_n) - \\ &- K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) + 2K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}))/2. \end{aligned}$$

Если в этих методах положим $K(x, s, z) = F(s, z)$, то получим метод трапеции.

Отметим, что из метода (2) можно получить методы, подобные методам Эйлера. Например, следующие методы:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + f_{n+1} - f_n + h(K(x_n, x_n, y_n) + K(x_{n+1}, x_n, y_n))/2, \\ y_{n+1} &= y_n + f_{n+1} - f_n + h(2K(x_n, x_n, y_n) - K(x_{n+1}, x_n, y_n)). \end{aligned}$$

Таким образом, определили связь между коэффициентами многошагового метода (2) и конечно-разностного метода (6). Используя методы, имеющие разные степени и систему (4), можем построить разные многошаговые методы для численного решения уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов В.Р., Мехтиева Г.Ю. Об одном обобщении методов квадратур. Вестник БГУ, 2008 г., №1, стр. 92 – 98.
2. Ibrahimov V.R., Imanova M.N. On a new method of solution to Volterra integral equation. Transactions issue mathematics and mechanics series of physical technical and mathematical science, XXVII, 2007, №1, 197-204.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Науково Думка, 1986.
4. Zima P., Diogo T. Numerical solution of a no uniquely solvable Volterra integral equation using extrapolation methods, I. Comput. Appl. Math. 140 (2002), 537-557.
5. Brunner H. The Solution of Volterra integral equations of the first kind by piecewise polynomials. – J. Inst. Math. and Appl., 1973, 12, №3, p. 295-302.
6. Ch. Lubich. Runge-Kutta theory for Volterra and Abel Integral equations of the second kind. Mathematics of computation volume 41, number 163, July 1983, p. 87-102.
7. Булатов М.В., Чистяков Е.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами. Дифференц. уравнения, 2006, том 42, №9, с. 1248-1255.
8. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: В 2-ч т. – 3-е изд. – Т.1. М.: Наука, 1966. – 632 с.

ÇOXADDIMLI ÜSULLARIN ƏMSALLARININ TAPILMASININ BİR SXEMİ HAQQINDA

Q.Yu.MEHDİYEVA, V.R.İBRAHİMOV

XÜLASƏ

Volter tipli qeyri-xətti integral tənliklərin ədədi həllinə tətbiq olunan kvadratur üsulun κ -addımlar üsuluna gətirilməsinin mümkün olması və kvadratur üsulunun əsas nöqsanının qeyd olunduğu bu müəlliflərin məqaləsində Volter tipli qeyri-xətti integral tənliklərin həlli üçün yeni çoxaddımlı üsul təklif edilmişdir. Bu məqalədə sonlu fərqlər üsulunun əmsallarının köməyiylə yuxarıda qeyd olunan çoxaddımlı üsulun əmsallarının hesablanması mümkünlüyü göstərilir.

ON A WAY OF THE DEFINITION OF THE COEFFICIENTS MULTISTEP METHODS

G.Yu.MEHDIYEVA, V.R.IBRAHIMOV

SUMMARY

It was shown by authors that the quadrate method was applied for the solving Volterra integral equations of the second kind can be reduce to the k -step method and to find the deficiency of the quadrate method was suggested the new multistep method for the solving the nonlinear Volterra integral equations. In this work it is shown that the coefficients of that method can be define by the coefficients of the finit-difference method.